

**Автономная некоммерческая организация профессионального образования
«ПЕРМСКИЙ ГУМАНИТАРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
(АНО ПО «ПГТК»)**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**ОП.11 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА**

для специальности

09.02.11 Разработка и управление программным обеспечением
(код и наименование специальности)

Квалификация выпускника
Программист

Форма обучения
Очная

Пермь 2026

Методические рекомендации по выполнению практических работ учебной дисциплины ОП.11 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА составлен в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 09.02.11 Разработка и управление программным обеспечением

Данные методические рекомендации помогут организовать самостоятельную деятельность студентов на основе деятельного и компетентного подходов к обучению, что соответствует ФГОС СПО по специальности 09.02.11 Разработка и управление программным обеспечением.

Программа предназначена для студентов и преподавателей АНО ПО «ПГТК».

Автор – составитель: Могильникова Н.С., старший преподаватель.

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению практических занятий учебному предмету ОП.11 Теория вероятностей и математическая статистика предназначены для обучающихся по специальности: 09.02.11 «Разработка и управление программным обеспечением» Рабочей программой дисциплины предусмотрено выполнение студентами практических занятий. Цель работ – углубление, расширение и закрепление знаний, полученных на теоретических занятиях по данной дисциплине.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен **уметь:**

- У1.**распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте, анализировать и выделять её составные части;
- У2.**определять этапы решения задачи, составлять план действия, реализовывать составленный план, определять необходимые ресурсы;
- У3.**выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы;
- У4.** владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;
- У5.**оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника);
- У6.**использовать современное программное обеспечение в профессиональной деятельности (;
- У7.**применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач;
- У8.**использовать расчетные формулы, таблицы, графики при решении статистических задач;
- У9.**применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа;
- У10.** взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности;

знать:

- З1.** актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить
- З2.** структуру плана для решения задач, алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях;
- З3.** основные источники информации и ресурсы для решения задач и/или проблем в профессиональном и/или социальном контексте;
- З4.** методы работы в профессиональной и смежных сферах;

- 35. программное обеспечение в профессиональной деятельности;
- 36. алгебру событий, теоремы умножения и сложения вероятностей, формулу полной вероятности;
- 37. схему и формулу Бернулли, приближенные формулы в схеме Бернулли, формулу (теорему) Байеса;
- 38. понятия случайной величины, дискретной случайной величины, ее распределение и характеристики, непрерывной случайной величины, ее распределение и характеристики;
- 39. законы распределения непрерывных случайных величин;
- 310. центральную предельную теорема, выборочный метод математической статистики, характеристики выборки;
- 311. понятия вероятности и частоты;
- 312. психологические особенности личности;
- 313. методы теории вероятности в разработке программного обеспечения.

В результате освоения данной дисциплины у обучающегося формируются общие и профессиональные компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ПК 2.2. Разрабатывать модули программного обеспечения.

Форма промежуточной аттестации по учебному предмету

Наименование учебного предмета	Форма промежуточной аттестации
ОП.11 Теория вероятностей и математическая статистика	Дифференцируемый зачет

Практическая работа № 1.

Вычисление вероятностей событий на основе классического определения вероятности.

В результате обучающийся должен

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

1. Бросают две игральные кости. Какая вероятность того, что сумма очков четная?
2. Из 10 единиц продукции, среди которых четыре второго сорта, выбирают три. Какая вероятность того, что среди них одна единица продукции второго сорта?
3. Из 15 смартфонов 10 черного цвета. Какая вероятность того, что из выбранных наугад 4-х два черного цвета?
4. Из 40 вопросов теста студент знает ответ на 30 вопросов. Какая вероятность того, что студент ответит на два тестовых вопроса из трех?
5. В ящике комода 3 серых и 5 черных носков, выбирают два носка. Какая вероятность того, что они разного цвета?
6. Кидают две игральные кости. Какая вероятность того, что число выпавших очков будет больше 8?
7. На предприятии предлагается сотрудникам 40 путевок на летний отдых, среди которых 15 в Крым. Какая вероятность того, что из 10 выбранных путевок 4 –в Крым?
8. Из игральной колоды (52 карты) участнику игры раздают 5 карт. Какая вероятность того, что игрок получит ровно одного туза?
9. На витрине 10 колбас, из которых 4 –Енакиевского завода. Какая вероятность того, что среди трех выбранных колбас одна –Енакиевского завода?
10. Дистанционная контрольная включает в себя 25 вариантов билетов по два задания. Обучающийся разобрал решение 45 заданий. Какая вероятность того, что полученный им вариант будет содержать подготовленные задания?
11. Известно, что из 9 яиц 5 высшей категории. Какая вероятность того, что из 3 яиц, снесенной курицей, одно высшей категории?
12. Дистанционная контрольная включает в себя 20 билетов по два вопроса. Обучающийся подготовил ответ на 35 вопросов. Какая вероятность того, что полученный билет состоит из неподготовленных вопросов?
13. На склад поступило 5 бракованных изделий и 23 –стандартного качества.

На проверку выбирают 3 изделия. Какая вероятность того, что партия будет забракована, если известно, что партия признается бракованной, если при проверке трех изделий хотя бы одно – нестандартно?

14. Десять видов мороженого расставляются на одной витрине в ряд. Какая вероятность того, что 3 вида мороженого Донецкой фабрики окажутся рядом?

15. Какая вероятность того, что среди группы 25 студентов ДонНУА хотя бы у двух день рождения окажется в один день? Для простоты расчетов високосные годы не рассматривать.

16. На складе имеется 7 единиц продукции завода А, 3 единицы продукции завода В и 5 единиц продукции завода С. Всю продукцию загружают в три грузовых автомобиля. Найти вероятность того, что: а) в каждом грузовом автомобиле по 1 единице продукции завода В; б) в случайно выбранном грузовом автомобиле нет продукции завода В

17. Среди 8 рыб 5 с икрой. Какая вероятность того, что среди трех пойманных рыб только одна с икрой?

18. Имеется 6 серых и 5 черных носков. Вынимают два носка. Какая вероятность того, что они одинакового цвета?

19. На предприятии 30 сотрудников, среди которых 10 должны пойти в отпуск зимой. Какая вероятность того, что из 10 выбранных наугад сотрудников 4 идут в отпуск зимой?

пробелы в знаниях основного учебного материала практической работы, который полностью не раскрыл содержание вопросов, не смог ответить письменно или устно на уточняющие и дополнительные вопросы. при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 4 и более неточности.

Практическая работа № 2.

Вычисление вероятностей событий на основе теорем сложения и умножения.

В результате обучающийся должен

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

1. Работник предприятия находится в данный день на больничном с вероятностью 0,01. Какова вероятность, что из 10 работников:

- а) все не находятся на больничном;
- б) хотя бы один находится на больничном?

2. Четыре выпускника строительного вуза проходит собеседование для принятия на работу. Вероятности того, что их примут на работу, соответственно для каждого из них равны 0,2, 0,3, 0,4 и 0,5. Какая вероятность того, что на работу будут приняты три выпускника из четырех?

3. На строительной площадке работает два подъемных крана, причем первый может потребовать наладки с вероятностью $P(A)=0,1$, а второй – с вероятностью $P(B)=0,2$. События А – первый кран требует наладки, В – второй требует наладки. Найти вероятность того, что один из подъемных кранов требует наладки.

4. Найти вероятность полной остановки строительства, если вероятности остановки каждого из этапов строительства следующие: $p_1=p_2=p_3=0,2$; $p_4=0,1$; $p_5=p_6=0,2$; $p_7=0,1$, и отказы отдельных этапов независимы.

5. Кидают игральную кость. Случайное событие А – выпало четное количество очков, случайное событие В – выпало более 3 очков. Зависимы ли эти события?

6. Инженер проводит два расчета. Вероятность того, что он допустит ошибку при вычислениях, для первого расчета равна 0,003, а для второго – 0,002. Что вероятнее:

- а) инженер не допустит ошибки в двух расчетах;
- б) ошибется хотя бы в одном из них?

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант

1. Известно, что вероятности независимых совместных случайных событий соответственно равны: $p(A)=0,5$; $p(B)=0,7$; $p(C)=0,8$. Какая вероятность того, что:

- а) произойдет только одно из этих случайных событий;
 - б) произойдет не более двух случайных событий;
 - в) хотя бы одно событие?
2. Известно, что вероятности независимых совместных случайных событий соответственно равны: $p(A)=23$; $p(B)=25$; $p(C)=35$. Какая вероятность того, что:
- а) произойдет хотя бы два из этих событий,
 - б) произойдет не менее двух событий,
 - в) хотя бы одно событие?
3. Студентов Иванова, Петрова и Козлова попросили принять участие в субботнике. Иванов обещал прийти, но вероятность того, что он сделает это, равна 0,9; для Петрова эта вероятность равна 0,85, а для Козлова 0,95. Какая вероятность того, что:
- а) ни один из них не примет участие в субботнике;
 - б) хотя бы один из них не придет?
4. На строительной площадке используется два подъемных крана. Вероятность того, что кран потребует технического обслуживания, соответственно для первого и второго крана составляет 0,02 и 0,05. Какая вероятность того, что:
- а) оба крана не потребуют технического обслуживания;
 - б) хотя бы один не потребует технического обслуживания?

2 вариант

1. Известно, что вероятности независимых совместных случайных событий соответственно равны: $p(A)=0,25$; $p(B)=0,45$; $p(C)=0,55$. Какая вероятность того, что: а) произойдет только одно из этих случайных событий;
- б) произойдет не более одного события,
 - в) хотя бы одно событие?
2. Студент Иванов пройдет тестирование на «отлично» с вероятностью 0,6; Петров с вероятностью 0,3; Козлов–0,7. Какая вероятность того, что:
- а) пройдут тестирование на «отлично» ровно 2 студента;
 - б) никто из них не пройдет тестирование на «отлично» ;
 - в) пройдет тестирование на «отлично» хотя бы один из них?
3. Для работника предприятия вероятность уйти на больничный 0,09. Какова вероятность, что из 3-х работников отдела:
- а) трое пойдут на больничный?
 - б) хотя бы один пойдет на больничный?
4. Процент брака в партии кирпича равен 0,2%. Какая вероятность того, что в

закупленной партии из 1000 кирпичей:

- а) нет брака;
- б) хотя бы один кирпич с браком?

Критерии оценивания практической работы:

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

.

Практическая работа № 3

Построение закона распределения и функции распределения ДСВ.

В результате обучающийся должен

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

1. Возможные значения случайной величины таковы: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,15$. Найти вероятность x_3 .

2. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 500 и десять выигрышей по 10 рублей. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Построить многоугольник распределения.

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

4. Дан ряд распределения дискретной случайной величины:

X	2	3	5	6	8
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

5. Два орудия стреляют по цели; вероятности попадания в цель при одном выстреле для них равны соответственно 0,7 и 0,8. Для случайной величины X (числа попаданий в мишень при одном залпе) составить ряд распределения.

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант	2 вариант
Возможные значения случайной величины таковы: $x_1 = 6$, $x_2 = 7$, $x_3 = 8$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_2 = 0,6$; $p_3 = 0,25$. Найти вероятность x_1 .	Возможные значения случайной величины таковы: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_1 = 0,45$; $p_3 = 0,3$. Найти вероятность x_2 .
В лотерее среди 100 билетов 5 с выигрышем 1000 руб., 15 – 100 руб., 25 – 10 руб., остальные по 0. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.	В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Среди них два выигрыша по 50 руб., пять по 20 руб., десять по 10 руб., 25 по 5 руб. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

<p>Два стрелка произвели по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,5; вторым - 0,4. Составить закон распределения числа попаданий в мишень.</p>	<p>Два стрелка произвели по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,7; вторым - 0,6. Составить закон распределения числа попаданий в мишень.</p>
--	--

Дан ряд распределения дискретной случайной величины:						Дан ряд распределения дискретной случайной величины:					
X	1	3	5	7	9	X	2	4	6	8	10
p	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1	p	0,1	0,1	0,4	0,3	0,1
Построить функцию распределения этой случайной величины и ее график.						Построить функцию распределения этой случайной величины и ее график.					
Телефонистка трижды вызывает абонента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй вызов – 0,3 и третий вызов – 0,4. Составить закон распределения вероятностей числа X вызовов, принятых абонентом.						Составить закон распределения вероятностей числа X исправных приборов, если их три, а вероятности того, что исправны, соответственно равны 0,9, 0,8, 0,7.					

Критерии оценивания практической работы:

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

Практическая работа № 4

Вычисление основных числовых характеристик ДСВ

В результате обучающийся должен

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

1. Найти математическое ожидание случайной величины X , зная ее закон распределения.

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

2. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	5	2	4
P	0,6	0,1	0,3

Y	7	9
P	0,8	0,2

3. Производится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1=0,4$; $p_2=0,3$; $p_3=0,6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

4. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия $p=0,6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

5. Найти дисперсию случайной величины X , которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Задачи для самостоятельного решения

Задание №1. Найдите математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\delta(X)$.

Для вычисления дисперсии используйте два способа.

Вариант 1.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,1	0,1	0,09	0,3	0,009	0,3	0,001

Вариант 2.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,2	0,3	0,2	0,06	0,1	0,006	0,1	0,034

Вариант 3.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,1	0,3	0,1	0,005	0,1	0,005	0,3	0,09

Вариант 4.

X	-1	-2	-3	-10	-12	-20	-30	-40
P	0,2	0,4	0,1	0,002	0,1	0,09	0,1	0,008

Задание №2. Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения. Найти математическое ожидание произведения $M(XY)$ и $M(2Y)$.

Вариант 1.:

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

Вариант 2.

X	2	1
p	0,6	0,4

Y	1	1,25
p	0,8	0,2

Вариант 3.

X	3	2
p	0,7	0,3

Y	0,65	2
p	0,5	0,5

Вариант 4.

X	1	3
p	0,1	0,9

Y	1	1,35
p	0,4	0,6

Задание №3.

Вариант 1. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель $p_1=0,6$ $p_2=0,4$, $p_3=0,5$ и $p_4=0,7$. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 2. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель $p_1=0,3$ $p_2=0,4$, $p_3=0,6$ и $p_4=0,5$. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 3. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель $p_1=0,1$ $p_2=0,2$, $p_3=0,6$ и $p_4=0,9$. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Вариант 4. Производится 4 выстрела с вероятностью по падения в цель $p_1=0,7$ $p_2=0,2$, $p_3=0,8$ и $p_4=0,5$. Найти математическое ожидание общего числа попадания.

Задание №4.

Вариант 1. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,2. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 10 деталей.

Вариант 2. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,3. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 12 деталей.

Вариант 3. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,7. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 15 деталей.

Вариант 4. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,9. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 18 деталей.

Задание №5

Вариант 1. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 100 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,7.

Вариант 2. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 130 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,6
Вариант 3. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 150 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,2.

Вариант 4. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в 200 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,4.

Критерии оценивания практической работы:

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

Практическая работа № 5

Решение задач на запись распределений ДСВ

В результате обучающийся должен

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

1. Построить закон распределения случайной величины X – количества домов, данных в эксплуатацию в срок, из 3 строящихся. Вероятность сдачи в эксплуатацию в срок для каждого дома одинакова и равна 0,9.

2. Завод отправил на базу 4000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие проверится, равно 0,0002. Найти закон распределения числа проверенных изделий (при подсчете используйте таблицу распределения Пуассона). Вариантов случайной величины X – числа проверенных изделий должно быть столько, чтобы сумма их вероятностей была близка к 1.

3. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не попадет. Требуется составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку.

4. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант	2 вариант
Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти закон распределения числа бракованных книг (при подсчете используйте таблицу распределения Пуассона) Вариантов случайной величины X - количества бракованных книг должно быть столько, чтобы сумма их вероятностей была близка к 1.	Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение определенного времени равна 0,002. Найти закон распределения числа отказавших элементов (при подсчете используйте таблицу распределения Пуассона) Вариантов случайной величины X – числа отказавших элементов должно быть столько, чтобы сумма их вероятностей была близка к 1.
Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0,6$. Требуется: а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку; б) найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.	Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0,9$. Требуется: а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку; б) найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.
В партии из семи деталей имеется три стандартных. Наудачу отобраны три детали. а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных. б) найти наивероятнейшее число стандартных деталей среди отобранных.	В партии из восьми деталей имеется пять стандартных. Наудачу отобраны три детали. а) составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных. б) найти наивероятнейшее число стандартных деталей среди отобранных.

Таблица распределения Пуассона

$k \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1	1,5	2
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,449329	0,367879	0,22313	0,135335
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,359463	0,367879	0,334695	0,270671
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,143785	0,18394	0,251021	0,270671
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,038343	0,061313	0,125511	0,180447
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,007669	0,015328	0,047067	0,090224
5	0	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,001227	0,003066	0,014120	0,036089
6	0	0	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000164	0,000511	0,003530	0,012030
7	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000019	0,000073	0,000756	0,003437
8	0	0	0	0	0	0	0,000002	0,000009	0,000142	0,000859
9	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000024	0,000191
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000004	0,000038
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000007
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Критерии оценивания практической работы:

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

Практическая работа № 6

Построение функции плотности и интегральной функции распределения

В результате обучающийся должен

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Краткая теория

Случайную величину называют **непрерывной**, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ – первую производную от функции распределения $F(x)$. $f(x) = F'(x)$

Пример 1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X . Найти плотность распределения $f(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \sin x & \text{при } 0 < x \leq \pi/2 \\ 1 & \text{при } x > \pi/2 \end{cases}$$

Решение. Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0', & \text{при } x < 0 \\ (\sin x)', & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1', & \text{при } x > \pi/2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \cos x & \text{при } 0 < x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{при } x > \pi/2 \end{cases}$$

Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $[a, b)$, можно найти, используя функцию распределения и плотность распределения.

При вычислении такой вероятности по функции распределения, используется формула $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Пример 2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1 \\ x/4 + 1/4 & \text{при } -1 < x \leq 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $[0, 2)$:

Решение. Так как по условию (вторая строка) на интервале $[0, 2)$ $F(x) = x/4 + 1/4$, то

$$P(0 \leq X < 2) = F(2) - F(0).$$

$$F(2) - F(0) = (2/4 + 1/4) - (0/4 + 1/4) = 1/2.$$

Получим $P(0 \leq X < 2) = 1/2$.

Для нахождения вероятности попадания случайной величины в интервал по плотности распределения, используется формула $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx$.

Пример 3. Задана плотность вероятности случайной величины X . Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $[0, 5; 1)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 2x & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Решение. Искомая вероятность

$$P(0,5 \leq X < 1) = \int_{0,5}^1 2x dx = \frac{2x^2}{2} \Big|_{0,5}^1 = x^2 \Big|_{0,5}^1 = 1 - 0,25 = 0,75$$

Зная плотность распределения можно найти функцию распределения по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

Пример 4. Случайная величина задана плотностью распределения. Найти: функцию распределения.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ (\sin x)/2 & \text{при } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{при } x > \pi \end{cases}$$

Решение

1. Если $-\infty < x \leq 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^x 0dx = 0$.

2. Если $0 < x \leq \pi$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^x \frac{\sin x}{2} dx = 0 + \left(-\frac{\cos x}{2}\right) \Big|_0^x = -\frac{\cos x}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2}$$

3. Если $x > \pi$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2} dx + \int_{\pi}^x 0dx = 0 + \left(-\frac{\cos x}{2}\right) \Big|_0^{\pi} + 0 = -\frac{\cos \pi}{2} - \left(-\frac{\cos 0}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Ответ: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ (1 - \cos x)/2 & \text{при } 0 < x \leq \pi \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$

Пример 5. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ равна $f(x) = a \cdot \cos(x)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр a .

Решение

Если функция $f(x)$ представляет собой плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, заданной на интервале (a, b) , то выполняется условие $\int_a^b f(x)dx = 1$

$$\text{Найдем } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cdot \cos x dx = a \cdot \sin(x) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = a \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = a(1 + 1) = 2a$$

Приравняем результат к единице: $2a = 1$. Таким образом, искомый параметр $a = \frac{1}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 3 \\ (x - 3)^2, & \text{при } 3 < x \leq 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения $f(x)$.

б) Построить график функций $F(x)$ и $f(x)$

в) Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $[2; 3]$ двумя способами:

- по функции $F(x)$
- по функции $f(x)$

2. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \sin 4x & \text{при } 0 < x \leq \pi/8 \\ 1 & \text{при } x > \pi/8 \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$ и построить ее график.

3. Задана плотность распределения. Найти функцию распределения.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ (3/2)\sin 3x, & \text{если } 0 < x \leq \pi/3 \\ 0, & \text{если } x > \pi/3 \end{cases}$$

Вариант 2

Вариант 1

1. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1 \\ \frac{1}{9}(x-1)^2, & \text{при } 1 < x \leq 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$$

- а) Найти плотность распределения $f(x)$.
 б) Построить график функций $F(x)$ и $f(x)$
 в) Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $[2; 3)$ двумя способами:
 – по функции $F(x)$
 – по функции $f(x)$

2. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \sin 2x & \text{при } 0 < x \leq \pi/4 \\ 1 & \text{при } x > \pi/4 \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$ и построить ее график.

3. Задана плотность распределения. Найти функцию распределения.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ (3/2)\sin 3x, & \text{если } 0 < x \leq \pi/3 \\ 0, & \text{если } x > \pi/3 \end{cases}$$

Таблица синусов и косинусов

Угол x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{4}$	2π
Sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
Cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Критерии оценивания практической работы:

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

Практическая работа № 7

Вычисление числовых характеристик НСВ

В результате обучающийся должен

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Краткая теория

Для непрерывной случайной величины можно определить следующие числовые характеристики:

• **Математическое ожидание** – средневзвешенное по вероятностям значение случайной величины.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx - \text{если возможные значения } X \text{ принадлежат всей числовой прямой.}$$

• **Мода** – наиболее вероятное значение случайной величины X .

• **Дисперсия** – характеризует разброс случайной величины вокруг ее математического ожидания.

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(x))^2 - \text{если возможные значения } X \text{ принадлежат интервалу } [a, b]$$
$$D(X) = M(x^2) - (M(x))^2$$

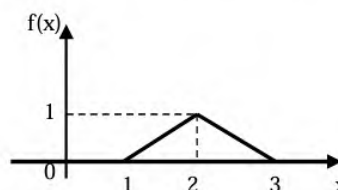
• **Среднее квадратичное отклонение** $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$.

Рассмотрим примеры определения числовых характеристики непрерывных случайных величин.

Рассмотрим примеры определения числовых характеристики непрерывных случайных величин.

Пример 1. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения. Найти математическое ожидание.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ x - 1 & \text{при } 1 \leq x < 2, \\ -x + 3 & \text{при } 2 \leq x < 3, \\ 0 & \text{при } x \geq 3. \end{cases}$$



Решение

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^1 0dx + \int_1^2 x(x-1)dx + \int_2^3 x(-x+3)dx + \int_3^{\infty} 0dx = (x^3/3 - x^2/2) \Big|_1^2 + (3x^2/2 - x^3/3) \Big|_2^3 = \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right] - \left[\left(\frac{3 \cdot 9}{2} - \frac{27}{3} \right) - \left(\frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{8}{3} \right) \right] = 2.$$

Пример 2. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -1 \\ 3x^2, & \text{при } -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее

квадратичное отклонение этой случайной величины.

Решение

1. Найдем математическое ожидание: $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-1}^0 3x^3 dx = 3x^4/4 \Big|_{-1}^0 = -3/4.$

2. Определим дисперсию.

$$D(X) = \int_{-1}^0 x^2 * 3x^2 dx - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \int_{-1}^0 3x^4 dx - \frac{9}{16} = 3 \int_{-1}^0 x^4 dx - \frac{9}{16} = \frac{3x^5}{5} \Big|_{-1}^0 - \frac{9}{16} = \left(0 - \frac{3 \cdot (-1)^5}{5}\right) - \frac{9}{16} = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = 0.6 - 0.5625 = 0,0375.$$

Среднее квадратичное отклонение: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0,0375} = 0,19$

Пример 3. Случайная величина X задана плотностью распределения.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,5 \sin x, & x \in (0; \pi), \\ 0, & x \geq \pi \end{cases}$$

Найти моду.

Решение

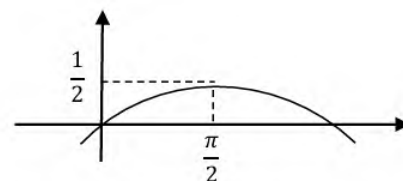
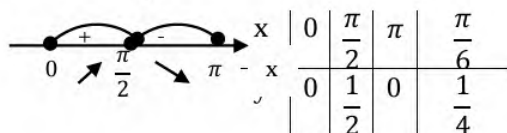
$$(0,5\sin x)' = 0,5 \cos x$$

$$0,5\cos x = 0$$

$\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ – критические точки данной функции на всей числовой прямой

$x = \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$ – критическая точка в рассматриваемом интервале

Проверим точку $x = \frac{\pi}{2}$ на максимум:



Т.к. в точке $x = \frac{\pi}{2}$ производная меняет знак с “+” на “-”, то в этой точке плотность вероятности будет максимальна.

Мода: $m = \frac{\pi}{2}$

Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1 \\ x + 1, & \text{при } -1 < x \leq 0 \\ 1 - x, & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

а) Найти математическое ожидание. б) Построить график $f(x)$.

2. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 4 \\ \frac{2}{9}x, & \text{при } 4 < x \leq 5 \\ 0, & \text{при } x > 5 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение этой случайной величины. Ответы запишите в десятичных дробях с точностью до тысячных.

3. Случайная величина X в интервале $(2, 4)$ задана плотностью распределения $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти моду величины X .

Вариант 2

1. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2 \\ x + 2, & \text{при } -2 < x \leq 0 \\ 2 - x, & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 0, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

а) Найти математическое ожидание. б) Построить график $f(x)$.

2. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 3 \\ \frac{1}{20}x, & \text{при } 3 < x \leq 7 \\ 0, & \text{при } x > 7 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение этой случайной величины. Ответы запишите в десятичных дробях с точностью до

тысячных.

3. Случайная величина X в интервале $(2, 4)$ задана плотностью распределения $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 6x - \frac{45}{4}$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти моду величины X .

Критерии оценивания практической работы:

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

Практическая работа № 8

Вычисление вероятностей для нормально, равномерно и показательного распределенных величин

В результате обучающийся должен

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ПК 2.2. Разрабатывать модули программного обеспечения.

Краткая теория

Среди непрерывных случайных величин особого внимания заслуживают величины, имеющие один из следующих законов распределения: равномерный, показательный, нормальный. *Нормальным* называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

где μ – математическое ожидание; σ – среднее квадратичное отклонение.

Вероятность попадания в интервал нормально распределенной случайной величины равна:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$$

где Φ – функция Лапласа (определяется по таблице приложения 1)

Пример 1. Время загрузки Web-страницы распределено нормально, причем его математическое ожидание равно $\mu = 7$ с, а стандартное отклонение $\sigma = 2$ с. Определите вероятность того, что время загрузки лежит в интервале 7 – 9 секунд. Решение

По условию, $\alpha = 7$, $\beta = 9$, $\mu = 7$, $\sigma = 2$. Следовательно,

$$P(7 < X < 9) = \Phi\left(\frac{9-7}{2}\right) - \Phi\left(\frac{7-7}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0,3413 - 0 = 0,3413.$$

Распределение вероятностей называют *равномерным*, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность вероятности постоянна.

Плотность равномерного распределения $f(x)$ определяется формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{при } a < x \leq b \\ 0, & \text{при } x > b \end{cases}$$

Вероятность попадания в интервал равномерно распределенной случайной величины

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

Пример 2.

Известно, что передатчик может начать работу в любой момент времени между 12 и

14 часами. Какова вероятность того, что начало передачи придется ждать не более 15 минут (0,25 часа). Решение.

Пусть $X(t)$ – время начала работы передатчика. Поскольку передача может начаться в любой момент между 12 и 14 часами и все моменты равно возможны, то X – случайная величина распределенная равномерно.

$$\alpha = 12, \beta = 12,25, a = 12, b = 14$$

$$P(12 < x < 12,25) = \frac{12,25 - 12}{14 - 12} = \frac{0,25}{2} = 0,125$$

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , которое описывается плотностью:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}, \text{ где } \lambda - \text{постоянная положительная величина}$$

Функция показательного распределения определяется формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Пример 3.

Написать плотность, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию показательного закона, если параметр $\lambda = 8$.

Решение

Искомая плотность распределения равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 8e^{-8x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 1 - e^{-8x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Математическое ожидание $M(x) = 1/\lambda = 1/8$

Дисперсия $D = 1/\lambda^2 = 1/64$

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант

Задание 1. Решите следующие задачи.

1. Масса одного батона хлеба есть случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения с математическим ожиданием 600 г и среднеквадратическим отклонением 6 г. Найдите вероятность того, что масса взятого для контроля батона из этой партии:

а. Заключена в пределах от 580 до 600 г.

б. Не больше 580 г

с. С помощью правила трех сигм установите границы, в которых будет находиться масса одного батона хлеба

2. Автобусы маршрута №2 идут строго по расписанию. Интервал движения – 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать

автобус менее 3 минут. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

3. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0,002$. Написать плотность распределения, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию показательного закона. Найти вероятность того, что за время длительностью $t = 500$ ч элемент откажет.

2 вариант

Задание 1. Решите следующие задачи.

1. Автомобильный завод запускает в производство новый двигатель. Конструкторы двигателя предполагают, что благодаря ему средняя длина пробега автомобиля составит 160 тыс. км, а среднее стандартное отклонение – 30 тыс. км. (средняя длина пробега автомобиля – случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения). Найдите вероятность того, что длина пробега автомобиля с таким двигателем составит:

- а. Заключена в пределах от 110 до 180 тыс. км.
- б. Не более 170 тыс. км
- в. С помощью правила трех сигм установите границы, в которых будет находиться длина пробега автомобиля.

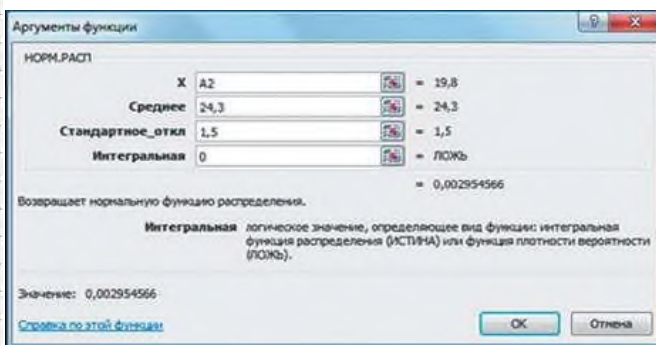
2. Автобусы маршрута №2 идут строго по расписанию. Интервал движения – 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус более 3 минут. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

3. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0,005$. Написать плотность, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию показательного закона. Найти вероятность того, что за время длительностью $t = 200$ ч элемент откажет.

Задание 2. Постройте в электронной таблице Microsoft Excel кривую Гаусса. Столбец А заполняется при помощи автозаполнения значениями от 19,8 до 28,8 с шагом 0,5.

1. Для заполнения столбца В используется стандартная функция группы Статистические: НОРМ. РАСП
2. Для построения графика функции используется *Мастер диаграмм* (тип диаграммы – График с маркером).
3. Меняя значения математического ожидания и дисперсии распределения, получите различные кривые — «колокола»: крутые или пологие

	A	B
1	x	f(x)
2	19,8	0,002955
3	20,3	0,007597
4	20,8	0,017481
5	21,3	0,035994
6	21,8	0,066318
7	22,3	0,10934
8	22,8	0,161314
9	23,3	0,212965
10	23,8	0,251589
11	24,3	0,265962
12	24,8	0,251589
13	25,3	0,212965
14	25,8	0,161314
15	26,3	0,10934
16	26,8	0,066318
17	27,3	0,035994
18	27,8	0,017481
19	28,3	0,007597
20	28,8	0,002955
21	29,3	0,001028



Методы теории вероятности в разработке программного обеспечения.

Теория вероятностей исследует свойства случайных величин, вероятности наступления случайных событий и их взаимосвязь. Первой серьезной попыткой использования математики для вычисления вероятностей стала «Книга об азартных играх» миланского врача, математика и заядлого игрока Джероламо Кардано, написанная в 1563 году. Брошюра оставалась неизданной почти 100 лет; когда ее наконец-то издали, свой вклад в теорию вероятностей уже внесли Христиан Гюйгенс, Блез Паскаль и Пьер Ферма.

Математика вероятности зародилась как попытка поймать удачу за хвост – все ранние работы были так или иначе связаны с вычислением вероятностей выигрыша. Сейчас теория вероятностей помогает решать более важные проблемы – инженерные, технические и научные. Например, теорию вероятностей можно использовать:

1. В физике для анализа квантовых событий и случайных процессов в нанoeлектронике.
2. В экономике и финансах для создания моделей риска и определения вероятности колебаний на рынке ценных бумаг. Один из самых известных примеров использования теории вероятностей в финансах – модель Блэка-Шоулза для определения цены опционов на акции.
3. В биоинформатике для анализа биологических данных – последовательностей ДНК, РНК и белков. Теорвер помогает определить вероятность существования определенной последовательности нуклеотидов и оценить ее значимость для функционирования гена. Кроме того, теорвер используют для анализа геномных данных и определения генетических взаимодействий: вероятностные модели помогают выявить связь между генами и заболеваниями, оценить риски наследственности, а также помочь в разработке новых

лекарств и терапий.

4. В математической статистике для анализа данных, проверки статистических гипотез и прогнозирования.

5. В инженерно-технических расчетах для оценки надежности систем, прогнозирования отказов и определения вероятности возникновения аварийных ситуаций.

6. В разработке ПО – в криптографии, анализе данных, машинном обучении, тестировании и оптимизации алгоритмов. С недавних пор [вероятностное программирование](#) стало считаться новой парадигмой: появилось первое поколение вероятностных языков программирования – специфических диалектов существующих ЯП, – которые оптимально подходят для создания систем, помогающих принимать решения в условиях неопределенности.

Зачем разработчику теория вероятностей?

Как уже упоминалось выше, теория вероятностей применяется, прежде всего, в сложных отраслях разработки. Но это не значит, что разработчику софта попроще никогда не придется с ней столкнуться – вот один интересный случай из реальной жизни.

Недостаточно случайный random

Пользователи первых iPod'ов были сильно разочарованы функцией Shuffle: они ожидали, что список воспроизведения будет перемешиваться так, чтобы треки воспроизводились в совершенно случайном порядке и без повторов. В реальности же плейлисты получались странными: многие песни сохраняли оригинальный альбомный порядок, некоторые проигрывались очень редко, а другие повторялись несколько раз подряд. Стиву Джобсу даже пришлось объяснять публике, что именно так и работает функция рандомизации. Это действительно так – использование генератора псевдослучайных чисел в любом языке программирования приводит к не самому случайному результату, как это демонстрирует, например, функция random в Python:

```
>>> import random
>>> print(*[random.randint(1, 12) for i in range(12)])
9 9 9 6 2 3 5 9 8 12 10 4
```

Пользователей это объяснение не удовлетворило, и разработчикам пришлось делать алгоритм смешивания «менее случайным». Неизвестно, как именно программисты Apple решили эту проблему: возможно, воспользовались алгоритмом [тасования Фишера-Йетса](#). В том же Python этот алгоритм используется в методе random.shuffle и выдает результат, который понравился бы любому владельцу iPod'a:

```
>>> lst = [int(i) for i in range(1, 13)]
>>> random.shuffle(lst)
>>> print(*lst)
9 6 1 10 12 2 7 5 11 4 8 3
```

Мораль этой истории не только в том, что нужно изучать алгоритмы, чтобы не изобретать велосипед, но и в том, что такой результат можно легко предсказать заранее – вероятность того, что треки в плейлисте не будут повторяться, вычисляется с помощью известного парадокса дней рождений:

```
import random
import math

# Количество треков в плейлисте
num_elements = 120

# Вероятность того, что хотя бы два трека будут одинаковыми
collision_prob = 1 - (1 - 1 / num_elements)**num_elements

# Вероятность того, что все треки уникальны
uniqueness_prob = 1 - collision_prob

print(f"Процент вероятности того, что все треки в списке будут уникальными: {uniqueness_prob * 100:.2f}%")
```

Результат:

Процент вероятности того, что все треки в списке будут уникальными: 36.63%

Среднюю уникальность списков можно определить эмпирическим путем. Проведем 10000 испытаний:

```
import random

num_tests = 10000
uniqueness_percentages = []

for _ in range(num_tests):
    list_numbers = [random.randint(1, 120) for _ in range(120)]
    unique_set = set(list_numbers)
    # Если количество элементов в множестве равно количеству в списке, то список уникален
    if len(unique_set) == len(list_numbers):
        uniqueness_percentages.append(100)
    else:
        uniqueness_percentages.append((len(unique_set) / len(list_numbers)) * 100)

# Вычисление среднего процента уникальности
average_uniqueness = sum(uniqueness_percentages) / num_tests
print(f"Средний процент уникальности: {average_uniqueness:.2f}%")
```

Результат показывает, что в среднем сгенерированные без специальных алгоритмов списки будут на $\approx 36,7\%$ состоять из повторяющихся элементов:

Средний процент уникальности: 63.33%

Как теория вероятностей используется в разработке

Теория вероятностей тесно связана со статистикой и комбинаторикой: во всех

приведенных ниже примерах подразумевается использование статистических и комбинаторных методов наряду с вероятностными.

Машинное обучение

Байесовская сеть – вероятностная модель, которую используют для представления зависимостей между различными переменными в системе. Байесовские сети оценивают вероятности различных событий на основе имеющихся данных. Такие модели применяют для классификации, регрессии, кластеризации и других задач машинного обучения.

Наивный байесовский классификатор – простой алгоритм машинного обучения, который использует теорию вероятностей для классификации данных. Алгоритм предполагает, что все признаки независимы друг от друга – это обеспечивает быструю и эффективную обработку больших объемов данных. Наивный Байес помогает классифицировать текстовые документы, фильтровать спам, распознавать речь.

Марковские модели – вероятностные модели, которые используют для анализа последовательностей самых разных данных – текстов, звуковых записей и временных рядов. Они помогают прогнозировать будущие значения и классифицировать последовательности.

Скрытые марковские модели – вероятностные модели, которые используют для анализа последовательностей данных, где каждое состояние не наблюдается напрямую, но может быть выведено из наблюдаемых данных. Такие модели состоят из конечного числа скрытых состояний, в которых может находиться система, и наблюдаемых событий, которые описывают систему, но не полностью. Каждое состояние имеет определенную вероятность перехода в другое скрытое состояние, и вероятности переходов определяются только текущим скрытым состоянием.

Гауссовский процесс – вероятностная модель для аппроксимации сложных функций. ГП можно использовать для прогнозирования временных рядов, моделирования неопределенности в данных и других задач.

Метод максимального правдоподобия – метод оценки параметров вероятностной модели на основе имеющихся данных. Его можно использовать для обучения моделей машинного обучения, например линейной и логистической регрессии.

Анализ данных и Data Science

Оценка надежности результатов – теорию вероятности используют для оценки надежности результатов, полученных из разных экспериментов: она помогает оценить вероятность того, что полученные данные не случайны.

Предсказание будущих результатов – с помощью теории вероятности прогнозируют будущие результаты на основе имеющихся данных. Модели, основанные на вероятностных

методах, могут прогнозировать показатели эффективности бизнеса, поведение пользователей и т.д.

Классификация данных – уже упомянутые байесовские сети помогают определить, к какому классу должен быть отнесен определенный объект.

Анализ неопределенности – теория вероятности помогает оценить риски и вероятности появления разных событий и исходов.

Моделирование данных – с помощью теории вероятности разрабатывают модели, которые помогают исследователям выявить взаимосвязь между разными переменными и предсказать будущие значения системы.

Анализ временных рядов – вероятностные модели помогают предсказать доходы, расходы и другие показатели, которые зависят от множества различных факторов.

Криптография

Анализ случайных чисел – теорию вероятностей использует для анализа генерации случайных чисел и определения того, насколько они действительно случайны. Это помогает оценить стойкость криптографических алгоритмов и предотвратить эксплойты, основанные на определении случайных чисел.

Анализ стойкости шифров – теорвер помогает определить вероятность расшифровки сообщения без знания ключа шифрования. Методы теории вероятностей применяют для брутфорс-атак (перебора ключей) на криптографические алгоритмы и для определения стойкости алгоритмов перед их использованием.

Разработка новых криптографических алгоритмов – теорию вероятностей применяют в теории информации, чтобы определить, какие алгоритмы являются наиболее эффективными для преобразования информации в зашифрованный формат.

Анализ протоколов аутентификации – вероятностные методы используют для анализа протоколов аутентификации, которые обеспечивают проверку подлинности сообщений и безопасность связи. Теорвер помогает определить, насколько протоколы безопасны и стойки к подделке и атакам.

Критерии оценивания практического занятия:

Оценка «отлично» выставляется, если обучающийся имеет знания учебного материала по теме практической работы – устно или письменно при ответе показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, смог ответить на все уточняющие и дополнительные вопросы, может письменно записать формулы расчета, пояснения к ним. Допускаются при записи незначительные исправления.

Оценка «хорошо» выставляется, если обучающийся показал знание учебного материала по практической работе – смог ответить устно или письменно почти на все

заданные дополнительные и уточняющие вопросы, при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 1–2 неточности.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если обучающийся в целом освоил материал по практической работе – смог ответить устно или письменно почти не на все заданные дополнительные и уточняющие вопросы, при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 3 неточности.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практической работы, который полностью не раскрыл содержание вопросов, не смог ответить письменно или устно на уточняющие и дополнительные вопросы. при записи формул расчета и пояснений к ним, графических изображений имеет 4 и более неточности.

Построение эмпирической функции распределения.

В результате обучающийся должен

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Краткая теория

Ранжирование предполагает упорядочение данных выборки. В результате ранжирования по возрастанию получается *вариационный ряд*.

Проранжированные данные удобнее записать в виде таблицы, в которой указывается перечень вариантов и их частот (относительных частот). Такая таблица называется *таблицей частот (относительных частот) или статистическим распределением*. Статистические распределения можно также записывать в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот.

Для наглядности строятся графики статистического распределения: полигон и гистограмму.

Полигоном частот (относительных частот) называется ломаная, отрезки которой соединяют точки с абсциссами равными вариантам и ординатами, равными частотам (относительным частотам) соответствующих вариантов.

Гистограммой частот (относительных частот) называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h , а высоты равны отношению n/h (W/h).

Пример 1. Дан статистический ряд: 2 2 3 3 3 3 4 2 3 3 2 3 2 3 2 3 2 4 3 2 2 3 2 4 5 2 3 3 2 4 3 2 2 3 4 3 3 2 3 5 3.

а) построить для него вариационный ряд; б) построить статистическое распределение для частот и относительных частот; в) дополнить статистическое распределение накопленными частотами; г) построить полигон частот и относительных частот.

Решение

а) Для получения вариационного ряда сгруппируем одинаковые значения исходного ряда и запишем их в порядке возрастания: 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5.

б) Подсчитав частоты каждой варианты, построим статистическое распределение. Для нахождения относительных частот используем формулу: $W_i = n_i/n$ (где n – объем

выборки). В нашем примере $n = 40$.

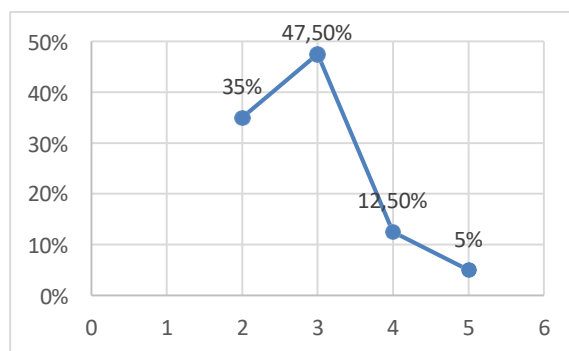
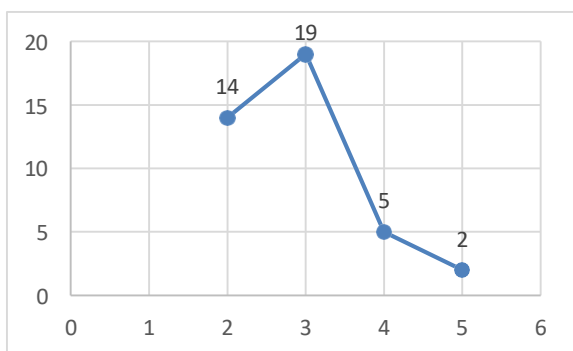
x_i	2	3	4	5
n_i	14	19	5	2
W_i	0,35	0,475	0,125	0,05

в) Накопленная частота S_i показывает, какая доля чисел статистического ряда не превышает данного значения. Накопленные частоты получаются из относительных частот накопительным суммированием.

x_i	2	3	4	5
n_i	14	19	5	2
W_i	0,35	0,475	0,125	0,05
S_i	0,35	0,825	0,95	1

г) Построим полигон частот, отложив по оси абсцисс значения x_i , а по оси ординат - n_i .

Аналогично построим полигон относительных частот.



Пример 2. На школьниках 1-го «А» класса было проведено исследование для выяснения того, сколько весит портфель первоклассника. В результате взвешиваний был получен следующий статистический ряд (масса каждого портфеля в кг): 2,1; 2,45; 1,9; 2,6; 3,1; 1,95; 3,4; 4,3; 1,15; 2,7; 2,2; 3,2; 2,4; 2,2; 1,8; 1,5; 2,4; 2,25; 2,6; 1,75.

а) постройте статистический ряд в виде интервальной таблицы частот, определите относительные частоты на каждом интервале.

б) постройте гистограмму частот и относительных частот.

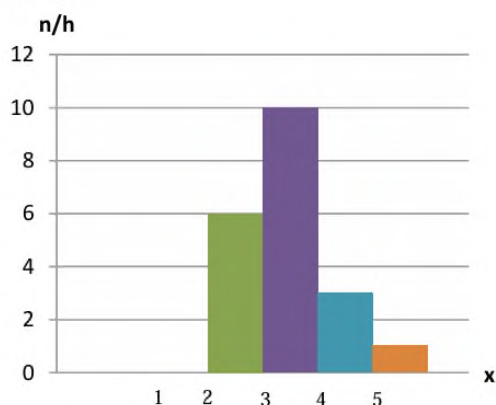
Решение

а) Для построения статистического ряда данных в виде интервальной таблицы частот разобьем все значения выборки на равные промежутки по 1 кг и подсчитаем число попаданий в каждый из них. Для нахождения относительных частот используем формулу: $W_i = n_i/n$. В нашем примере $n = 20$.

x_i	1-2	2-3	3-4	4-5
n_i	6	10	3	1
W_i	0,3	0,5	0,15	0,05

б) Для построения гистограммы частот определим для каждого интервала его длину h и плотность частоты (n_i/h).

$h = 1$ (определяется как разность x_i интервала); $n_1/h=6/1=6$; $n_2/h=10/1=10$; $n_3/h=3/1=3$; $n_4/h=1/1=1$.



Аналогично строится гистограмма относительных частот.

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант

1. Дан числовой ряд, представляющий итоговые оценки по математике студентов 1 курса: 3 4 5 4 4 3 5 4 4 3 5 4 5 2 3 3 4 4 4 5 3 3 5 5 4 5 2 3 3 4.

а) построить вариационный ряд; б) построить статистическое распределение для частот и относительных частот; в) дополнить статистическое распределение накопленными частотами; г) построить полигон частот и относительных частот.

2. Перед вами выборка, полученная по результатам изучения обменного курса некоторой валюты в 20-ти обменных пунктах города: 26,45; 26,4; 26,41; 26,45; 26,66; 26,53; 26,55; 26,44; 26,8; 26,67; 26,77; 26,43; 26,7; 26,6; 26,68; 26,58; 26,55; 26,54; 26,57; 26,59

а) Разбейте весь интервал от 26,0 до 27,0 на пять интервалов длиной 0,2, сгруппируйте данные и постройте по ним интервальную таблицу частот.

б) постройте гистограмму частот.

2 вариант

1. Сведения о числе пропущенных пар по математической статистике у 25 студентов второго курса имеют вид: 4 3 6 0 0 0 5 0 2 2 4 5 3 0 0 2 4 5 4 5 5 6 0 0 6.

а) построить вариационный ряд; б) построить статистическое распределение для частот и относительных частот; в) дополнить статистическое распределение накопленными частотами; г) построить полигон частот и относительных частот.

2. В отделе мужской обуви универмага в течение дня производился учет стоимости проданной обуви. Были получены следующие результаты (в рублях): 200, 1110, 2300, 890, 320, 1200, 560, 1340, 1400, 1050, 1050, 4700, 3200, 2900, 2100,

2450, 890, 1110, 1200, 1200, 2300, 1050, 1400, 1200, 890, 320, 1320, 890, 1100, 1050

а) Представьте эти данные в виде интервальной таблицы абсолютных и относительных частот, разбив диапазон цен от 0 до 5000 рублей на интервалы длиной по 1000 рублей.

б) постройте гистограмму частот.

Критерии оценивания практической работы:

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

Практическая работа № 10

Точечные и интервальные оценки

В результате обучающийся должен

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Краткая теория

Точечной называется статистическая оценка, которая определяется одним числом $\Theta^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_1, x_2, \dots, x_n – результаты n наблюдений над признаком X . По сути точечная оценка – это число, оцениваемое на основе наблюдений, предположительно близкое к оцениваемому параметру.

а. Несмещенной называется точечная оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки.

б. Смещенной называется точечная оценка, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Несмещенной оценкой генеральной средней является выборочная средняя:

$$\bar{x}_B = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n}$$

Смещенной оценкой генеральной дисперсии является выборочная дисперсия:

$$D_B = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 n_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 n_k}{n}$$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии является исправленная выборочная

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B$$

дисперсия:

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами — концами интервала. Доверительный интервал – это интервал, в который с заданной вероятностью попадет неизвестное значение оцениваемого параметра распределения.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии имеет следующий смысл: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $(\bar{x} - t_\gamma \sigma / \sqrt{n}, \bar{x} + t_\gamma \sigma / \sqrt{n})$ покрывает неизвестный параметр a ; точность оценки $\delta = t_\gamma \sigma / \sqrt{n}$.

$$P(\bar{x} - t_\gamma \sigma / \sqrt{n} < a < \bar{x} + t_\gamma \sigma / \sqrt{n}) = 2\Phi(t) = \gamma$$

Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии имеет следующий вид:

$P(\bar{x} - t_\gamma^* s / \sqrt{n} < a < \bar{x} + t_\gamma^* s / \sqrt{n}) = \gamma$, где s – «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение, t_γ находят по таблице приложения 4 по заданным n и γ .

Пример 1. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 3$. Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочным средним \bar{x} , если объем выборки $n = 36$ и задана надежность оценки $\gamma = 0,95$.

Решение

Найдем t . Из соотношения $2\Phi(t) = 0,95$ получим $\Phi(t) = 0,475$. По таблице приложения 2 находим $t = 1,96$.

Найдем точность оценки: $\delta = t\sigma/\sqrt{n} = 1,96*3/\sqrt{36} = 0,98$

Получим доверительный интервал: $(\bar{x} - 0,98; \bar{x} + 0,98)$.

Пример. 2 Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 16$ найдены выборочная средняя $\bar{x} = 20,2$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0,8$. Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надежностью $0,95$.

Решение

Найдем t_γ . Пользуясь таблицей приложения 2 при $\gamma = 0,95$ и $n = 16$, получим $t_\gamma = 2,13$.

Найдем доверительные границы:

$$\bar{x} - t_\gamma * s / \sqrt{n} = 20,2 - 2,13 * 0,8 / \sqrt{16} = 19,774.$$

$$\bar{x} + t_\gamma * s / \sqrt{n} = 20,2 + 2,13 * 0,8 / \sqrt{16} = 20,626.$$

Итак, с надежностью $0,95$ неизвестный параметр a заключен в доверительном интервале $19,774 < a < 20,626$.

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом $n = 50$. Найти несмещенную оценку генеральной средней.

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

2. По выборке объема $n = 51$ найдена смещенная оценка $D_b = 5$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

3. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $0,95$ неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$, выборочная средняя $\bar{x} = 14$ и объем выборки $n = 25$.

2 вариант

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом $n = 60$. Найти несмещенную оценку генеральной средней.

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

2. По выборке объема $n = 41$ найдена смещенная оценка $D_b = 3$ генеральной

дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания μ нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$, выборочная средняя $\bar{x} = 10,2$ и объем выборки $n = 16$.

3. По данным 16 независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x} = 42,8$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 1$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью $\gamma = 0,95$. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Критерии оценивания практической работы:

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

Практическая работа № 11

Построение выборочного уравнения прямой линии регрессии. Работа в прикладной программе многомерного статистического анализа.

В результате обучающийся должен

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Краткая теория

Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид: $y = \rho x + b$,

где $\rho = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$ – выборочный коэффициент регрессии Y на X

$b = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$ – свободный член

Пример 1. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным пяти наблюдений:

X	1.0	1.5	3.0	4.5	5.0
Y	1.25	1.4	1.5	1.75	2.25

Решение

1. Составим расчетную таблицу:

x	y	x^2	xy
1	1.25	1.0	1.25
1.5	1.4	2.25	2.1
3.0	1.5	9.0	4.5
4.5	1.75	20.25	7.875
5.0	2.25	25.0	11.25
$\Sigma x = 15$	$\Sigma y = 8.15$	$\Sigma x^2 = 57.5$	$\Sigma xy = 26.975$

2. Найдем выборочный коэффициент регрессии и свободный член:

$$\rho = \frac{5 * 26,975 - 15 * 8,15}{5 * 57,5 - 15^2} = 0,202$$

$$b = \frac{57.5 * 8.15 - 15 * 26.975}{5 * 57.5 - 15^2} = 1.024$$

3. Получаем уравнение регрессии: $Y = 0.202x + 1.024$

При проведении регрессионного анализа и других статистических расчётов часто используются прикладные компьютерные программы, такие как Microsoft Office Excel, Stadia, Statistica. Процедура регрессионного анализа в данных программах состоит из нескольких этапов:

1. задание математической формы уравнения регрессии и определение параметров регрессии (коэффициентов регрессионного уравнения).

2. определение взаимосвязи результативного признака и факторов, проверка статистической значимости уравнения регрессии.

3. проверка статической значимости каждого коэффициента

уравнения регрессии и определение их доверительных интервалов.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Построить выборочное уравнение регрессии и его график.

1 вариант

Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии по данным $n=8$

x	1,5	4,0	5,0	7,0	8,5	10,0	11,0	12,5	12,8	13,2
y	5,0	4,5	7,0	6,5	9,5	9,0	11,0	9,0	9,8	11,2

наблюдений, которые получены при изучении зависимости количества продаж товара y от затрат на рекламу этого товара x :

Построить график по результатам измерений, на этом же графике построить найденное выборочное уравнение прямой линии регрессии.

2 вариант

Исследование зависимости между среднемесячными доходами X на семью (в тыс. у.е.) и расходами Y на покупку кондитерских изделий (в у.е.) представлено в таблице:

X	4,8	3,8	5,4	4,2	3,4	4,6	3,4	4,8	5,0	3,8
Y	75	68	78	71	64	73	66	75	75	65

Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии.

Построить график по результатам измерений, на этом же графике построить найденное выборочное уравнение прямой линии регрессии.

Задание 2. Построить линейную регрессионную модель в ПО Microsoft Excel.

Задача. На 6 предприятиях была проанализирована среднемесячная заработная плата и количество уволившихся сотрудников. Необходимо определить зависимость числа уволившихся сотрудников от средней зарплаты.

	A	B	C
1		К-во ув.	З/п
2		y	x
3	1	60	100
4	2	35	150
5	3	20	200
6	4	20	250
7	5	15	300
8	6	15	350

Модель линейной регрессии имеет следующий вид:

$$Y = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_kx_k.$$

где a – коэффициенты регрессии, x – влияющие переменные, k – число факторов.

В нашем примере в качестве Y выступает показатель уволившихся работников. Влияющий фактор – заработная плата (x).

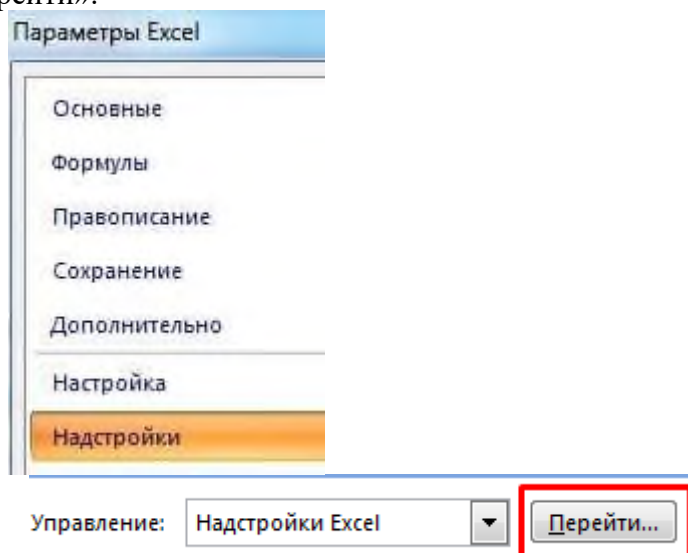
В Excel существуют встроенные функции, с помощью которых можно рассчитать параметры модели линейной регрессии, но удобнее это сделать с помощью надстройки «Пакет анализа».

Алгоритм решения задачи в ПО Excel

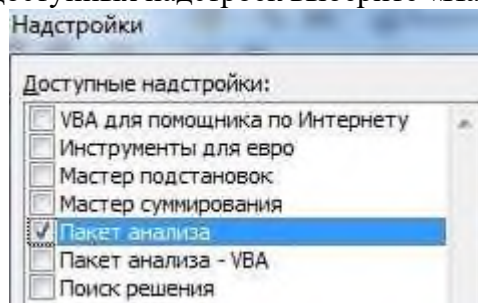
1. Активируйте надстройку «Пакет анализа»: нажмите кнопку «Офис» и перейдите на вкладку

Параметры Excel – Надстройки.

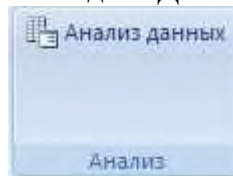
Внизу в поле «Управление» необходимо выбрать надпись «Надстройки Excel» и нажать на кнопку «Перейти».



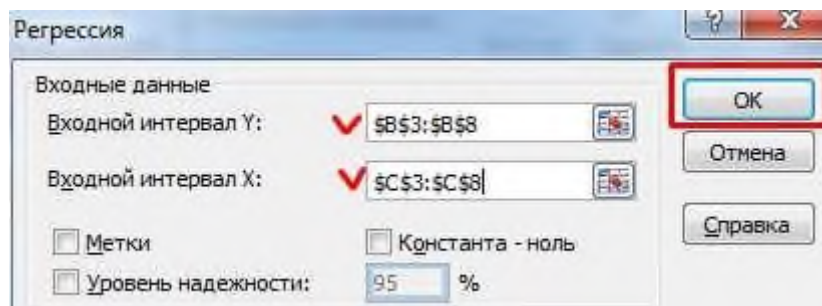
Из открывшегося списка доступных надстроек выберите «Пакет анализа» и нажмите ОК.



После активации надстройка будет доступна на вкладке «Данные».



2. Откройте меню инструмента «Анализ данных» и выберите пункт «Регрессия».
3. Откроется меню для выбора входных значений и параметров вывода. В полях для исходных данных укажите диапазон описываемого параметра (Y) и влияющего на него фактора (X). Остальное можно и не заполнять.



4. После нажатия ОК, программа отобразит расчеты на новом листе (можно выбрать интервал для отображения на текущем листе или назначить вывод в новую

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Вывод итогов								
3	Регрессионная статистика								
4	Множественный R	0,868736918							
5	R-квадрат	0,754703833							
6	Нормированный R-квадрат	0,693379791							
7	Стандартная ошибка	9,710083125							
8	Наблюдения	6							
10	Дисперсионный анализ								
11		df	SS	MS	F	ачимость F			
12	Регрессия	1	1160,357143	1160,357143	12,30681818	0,024714			
13	Остаток	4	377,1428571	94,28571429					
14	Итого	5	1537,5						
16		Стандарт				Нижние	Верхние	Нижние	Верхние
17		Коэффициент	ная ошибка	t-статистика	P-Значение	95%	95%	95,0%	95,0%
17	Y-пересечение	64,14285714	11,17212274	5,741331225	0,004560379	33,12407	95,16164	33,12407	95,16164
18	Переменная X 1	-0,162857143	0,046423077	-3,508107493	0,024714164	-0,29175	-0,03397	-0,29175	-0,03397

книгу).

5. Самостоятельно постройте по исходным данным точечную диаграмму. Добавьте линию тренда.

Интерпретация результатов

R-квадрат – коэффициент детерминации. В нашем примере – 0,755, или 75,5%. Это означает, что расчетные параметры модели на 75,5% объясняют зависимость между изучаемыми параметрами. Чем выше коэффициент детерминации, тем качественнее модель. Хорошо – выше 0,8. Плохо – меньше 0,5

Коэффициент Y-пересечение 64,1428 показывает, каким будет Y, если все переменные в рассматриваемой модели будут равны 0. То есть на значение анализируемого параметра влияют и другие факторы, не описанные в модели.

Коэффициент Переменная X -0,16285 показывает весомость переменной X на Y. То есть среднемесячная заработная плата в пределах данной модели влияет на количество уволившихся с весом -0,16285 (это небольшая степень влияния). Знак «-» указывает на отрицательное влияние.

Критерии оценивания практической работы:

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

Контрольная работа № 1

1 вариант

1. Автомат штампует детали. Контролируемый размер детали есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $m = 52$ см, $\sigma = 0,4$ см. Найдите вероятность того, что контролируемый размер детали составит:

- а. Залклучен в пределах от 51,97 до 52,03 см.
 - б. Не более 52,3 см
 - с. С помощью правила трех сигм установите границы, в которых будет находиться контролируемый размер деталей.
2. Запишите формулы для определения числовых характеристик непрерывных случайных величин.
3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1 \\ (x - 1)^2, & \text{при } 1 < x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

- а) Найти плотность распределения $f(x)$.
- б) Построить график функций $F(x)$ и $f(x)$
- в) Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $[1,5; 2)$ двумя способами:
 - по функции $F(x)$
 - по функции $f(x)$

2 вариант

1. Поезда метрополитена идут с интервалом 3 мин. Время ожидания поезда – равномерно распределенная случайная величина. С какой вероятностью пассажир, пришедший на платформу, будет ожидать поезд менее 1 мин? Найти математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

2. Какими формулами связаны функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины?

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1 \\ \frac{1}{16}(x + 1)^2, & \text{при } -1 < x \leq 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

- а) Найти плотность распределения $f(x)$.
- б) Построить график функций $F(x)$ и $f(x)$
- в) Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $[0; 2)$ двумя способами:
 - по функции $F(x)$
 - по функции $f(x)$

Контрольная работа № 2

1 вариант

1. Какая зависимость называется корреляционной?
2. Что такое доверительный интервал?
3. Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений 40 м произведено 5 равнооточных измерений расстояния от орудия до цели. Найти доверительный интервал для оценки истинного расстояния **a** до цели с надёжностью 0,95, зная среднее арифметическое результатов измерений 2000 м.
4. Что такое интервальная оценка?

2 вариант

1. Чем несмещенная точечная оценка отличается от смещенной?
2. Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы выборки оказалась равной 1000 ч. Найти с надёжностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности **a** горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы 40 ч.
3. Что представляет собой статистическое распределение?
4. Что такое точечная оценка?

Критерии оценивания контрольной работы:

Оценка «отлично» ставится при правильном выполнении 85-100% заданий;

Оценка «хорошо» ставится при правильном выполнении 70-85% заданий;

Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном выполнении 55-70% заданий;

Оценка «неудовлетворительно» ставится при выполнении менее 55% заданий.

2.2. Перечень вопросов и заданий для промежуточной аттестации

Форма: дифференцированный зачет.

Перечень вопросов для промежуточной аттестации

1. Случайные события. Классическое определение вероятности.
2. Операции над событиями. Вероятность противоположного события. Сумма событий.
3. Произведение событий. Условная вероятность.
4. Формула полной вероятности. Формула Байеса
5. Дискретная случайная величина (ДСВ).
6. Графическое изображение распределения ДСВ. Функции от ДСВ.
7. Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение ДСВ.
8. Понятие биномиального распределения, характеристики
9. Понятие геометрического распределения, характеристики
10. Непрерывная случайная величина (НСВ).
11. Интегральная функция распределения и ее свойства.
12. Дифференциальная функции распределения (плотность распределения)
13. Математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратичное отклонение НСВ. Мода и медиана НСВ
14. Задачи и метод математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Эмпирическая функция распределения. Сущность выборочного метода. Способы отбора.
15. Дискретные и интервальные вариационные ряды. Полигон и гистограмма.
16. Среднее, мода, медиана, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.
17. Понятие точечной оценки. Точечные оценки для генеральной средней (математического ожидания), генеральной дисперсии и генерального среднеквадратического отклонения.
18. Понятие функциональной, стохастической и корреляционной зависимости.
19. Условные средние. Выборочное уравнение регрессии и выборочный коэффициент регрессии.
20. Нахождение выборочного уравнения прямой линии регрессии методом наименьших квадратов

Критерии оценивания:

Оценка «5»: своевременно сданы практические и контрольные работы, балл по результатам выполнения контрольных и практических работ «5», правильно дан ответ на вопрос.

Оценка «4»: своевременно сданы практические и контрольные работы, средний балл по

результатам выполнения контрольных работ «4», во время ответа на вопрос были допущены несущественные ошибки, не противоречащие основным понятиям дисциплины.

Оценка «3»: своевременно сданы практические и контрольные работы, средний балл по результатам выполнения контрольных работ «3», во время ответа на вопрос, были допущены ошибки, не более одной грубой и двух-трех негрубых ошибок.

Оценка «2»: не сданы практические и контрольные работы (всем или нескольким), обучающийся не смог ответить на основной и дополнительный вопросы.

3. Рекомендуемая литература и иные источники

1. Элементы теории вероятностей и математической статистики : учебное пособие / Т. А. Гулай, А. Ф. Долгополова, В. А. Жукова [и др.]. — 5-е изд. — Ставрополь : Ставропольский государственный аграрный университет, 2021. — 112 с. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/121746.html>.

Дополнительные источники:

1. Чудина, Е. Ю. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / Е. Ю. Чудина. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2024. — 140 с. — ISBN 978-5-4497-2870-8. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/138385.html>
2. Чудина, Е. Ю. Теория вероятностей и математическая статистика : практикум / Е. Ю. Чудина. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2024. — 104 с. — ISBN 978-5-4497-2873-9. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/138384.html>

Дополнительные источники:

1. Теория вероятностей и математическая статистика : практикум / составители И. Л. Макарова, А. М. Игнатенко. — Сочи : Сочинский государственный университет, 2024. — 54 с. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/150403.html>

Таблица значений функции Лапласа

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,499952									
4,0	0,499968									
4,5	0,499997									
5,0	0,49999971									

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

№ п.п.	Содержание изменения	Дата, номер протокола заседания кафедры, подпись зав.кафедрой
1	2	3
1		
2		
3		
4		